

	Materi Pembelajaran	Capaian Pembelajaran
Minggu ke 5. PLO 5. CLO 2. Sub-CLO 5.	1. Jenis-jenis derai di sistem telekomunikasi. 2. AWGN. 3. Distribusi derai.	1. Memahami arti dan peran derai di sistem telekomunikasi. 2. Memahami AWGN.

1. Derai Thermal

Pada temperatur diatas 0^0K , elektron bergerak acak didalam konduktor.

Pergerakan thermal acak elektron-elektron didalam sebuah resistor (tahanan) menimbulkan fluktuasi tegangan di-terminal resistor. Fluktuasi tegangan ini disebut derai thermal, juga disebut sebagai **derai Johnson** atau **derai Nyquist**.

Karena gerakan acak sejumlah besar elektron-elektron memberikan kontribusi kepada derai thermal, kita dapat memakai teorema limit sentral untuk menyimpulkan bahwa derai thermal adalah sebuah **proses acak Gaussian**.

Tegangan mean-square (tegangan derai kuadrat rata-rata) derai yang muncul di-terminal sebuah resistor (tahanan) R pada temperatur T^0K dinyatakan dengan persamaan:

Teorema Nyquist:

Menyatakan bahwa tegangan derai di terminal resistor adalah:

$$v_{rms}^2 = \langle v_n^2(t) \rangle = 4kTRB \text{ Volt}^2$$

$$v_{rms} = \sqrt{4kTRB} \text{ Volt}$$

Dimana:

k = konstanta Boltzmann = $1,38 \times 10^{-23} \text{ Watt/Hz/}^0K$.

T = temperatur dalam $^0\text{Kelvin}$

R = tahanan dalam ohm.

B = bandwidth penerima atau bandwidth pengukuran (Hz)

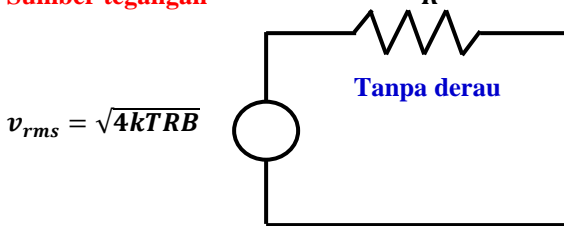
Arus mean-square:

$$i_{rms}^2 = \langle i_n^2 \rangle = \frac{\langle v_n^2 \rangle}{R^2} = \frac{4kTB}{R} = 4kTGB \text{ Ampere}^2$$

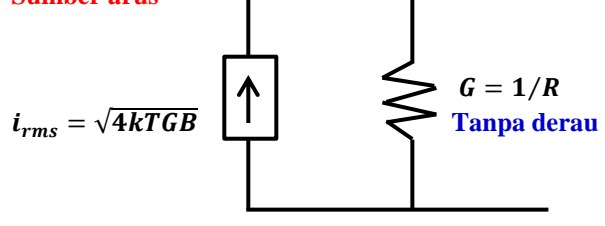
$$i_{rms} = \sqrt{\frac{4kTB}{R}} = \sqrt{4kTGB} \text{ Ampere}$$

Resistor berderai dapat direpresentasikan oleh rangkaian ekivalen yang terdiri dari resistor tanpa derai seri dengan sebuah generator derai dengan tegangan rms v_{rms} seperti pada gambar dibawah ini:

Sumber tegangan

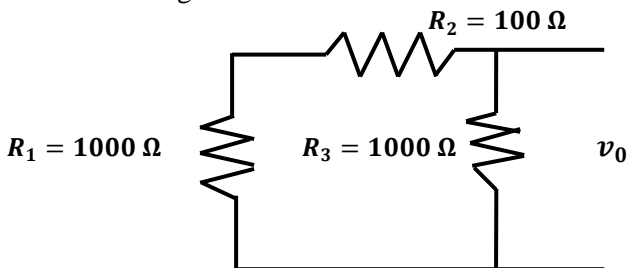


Sumber arus



Soal no 1.

Perhatikan rangkaian:



Bila masing-masing tahanan dianggap tanpa derai maka tahanan R_1 akan seri dengan v_{1rms} , tahanan R_2 akan seri dengan v_{2rms} , dan tahanan R_3 akan seri dengan v_{3rms} .

Hitung tegangan rms derai v_0 pada $T = 290^0K$ dan bandwidth 100 kHz .

Solusi:

$$v_0^2 = v_{01}^2 + v_{02}^2 + v_{03}^2$$

Dimana:

$$v_{01} = \sqrt{4kTR_1B} \left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right), \quad v_{02} = 0, \text{ dan } v_{03} = 0$$

$$v_{02} = \sqrt{4kTR_2B} \left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right), \quad v_{01} = 0, \text{ dan } v_{03} = 0$$

$$v_{03} = \sqrt{4kTR_3B} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \right), \quad v_{01} = 0, \text{ dan } v_{02} = 0$$

Maka:

$$v_0^2 = (4kTB) \left[\frac{(R_1 + R_2)R_3^2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} + \frac{(R_1 + R_2)^2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} \right]$$

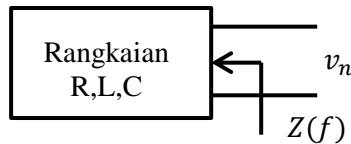
$$v_0^2 = (4 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 290 \times 10^5) \times \left[\frac{(1100)(1000)^2}{(2100)^2} + \frac{(1100)^2(1000)}{(2100)^2} \right]$$

$$v_0^2 = 1,6 \times 10^{-15} \times (2,4943 \times 10^2 + 2,7444 \times 10^2) = 1,6 \times 10^{-15} \times 5,2387 \times 10^2$$

$$v_0^2 = 8,39 \times 10^{-13} \text{ V}^2 \rightarrow v_0 = 9,16 \times 10^{-7} \text{ Volt (rms)}$$

2. Rumus Nyquist

Rangkaian pasif:



Tegangan derau mean-square yang dihasilkan di-keluaran jaringan 1 kutub terdiri hanya resistor, kapasitor dan induktor dinyatakan dengan persamaan:

$$\langle v_n^2(t) \rangle = 2kT \int_{-\infty}^{\infty} R(f) df$$

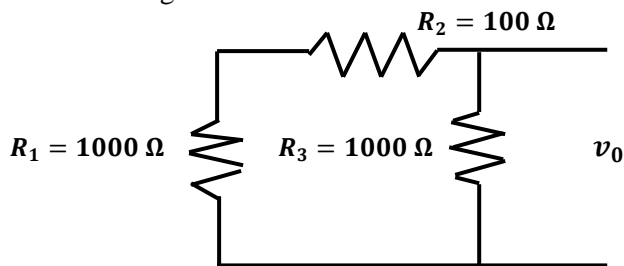
$R(f)$ adalah bagian riil impedansi kompleks dilihat kedalam rangkaian. (dalam besaran frekuensi (Hz), $f = \omega/2\pi$)

Bila rangkaian hanya terdiri resistor, maka tegangan mean-square didalam bandwidth B :

$$\langle v_n^2 \rangle = 4kTR_{eq}B \text{ Volt}^2$$

Soal no 2.

Perhatikan rangkaian:



Hitung tegangan rms derau v_0 pada $T = 290^0K$ dan bandwidth 100 kHz .

Solusi

Tahanan ekivalen:

$$R_{ekivalen} = R_3 \parallel (R_1 + R_2) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Maka:

$$v_0^2 = (4kTB) \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = (4 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 290 \times 10^5) \left(\frac{1000(1100)}{2100} \right)$$

$$v_0^2 = 1,6 \times 10^{-15} (5,2381 \times 10^2) = 8,39 \times 10^{-13} \text{ V}^2 \rightarrow v_0 = 9,16 \times 10^{-7} \text{ Volt (rms)}$$

Nilai ini = di-contoh no 2.

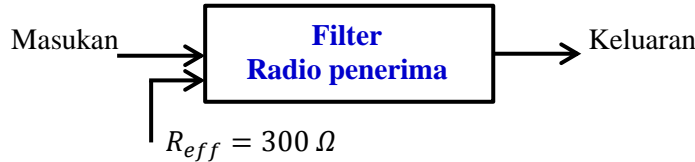
Soal no 3.

Filter bagian depan sebuah radio penerima melewati sinyal broadcast modulasi amplituda dari frekuensi 535 kHz sampai dengan 1605 kHz.

Masukan filter mempunyai tahanan efektif sebesar 300 Ω.

Berapa nilai tegangan derai root-mean-square (RMS) yang dapat diamati akibat tahanan tersebut pada suhu 27°C?

Solusi:



Bandwidth filter radio penerima $B = 1605 - 535 = 1070 \text{ kHz}$

Suhu $17^\circ\text{C} = 290^\circ\text{K}$.

Tegangan derai di terminal resistor adalah:

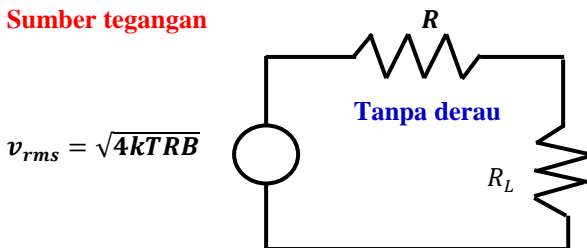
$$v_{rms}^2 = \langle v_n^2(t) \rangle = 4kTRB \text{ Volt}^2 = 4 \times (1,38 \cdot 10^{-23}) \times 290 \times 300 \times (1070 \cdot 10^3) = 5,14 \cdot 10^{-12} \text{ Volt}^2$$

$$v_{rms} = \sqrt{4kTRB} \text{ Volt} = 2,27 \cdot 10^{-6} \text{ Volt} = 2,27 \text{ microvolt}$$

3. Daya derai yang tersedia

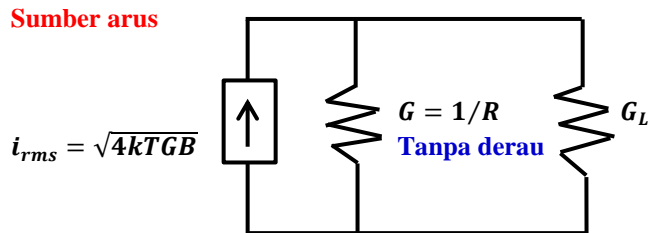
Perhitungan yang melibatkan derai, memberikan transfer daya, maka konsep daya maksimum yang tersedia dari sebuah sumber yang mempunyai tahanan dalam, sangat berguna.

Sumber tegangan



$$v_{rms} = \sqrt{4kTRB}$$

Sumber arus



$$i_{rms} = \sqrt{4kTGB}$$

Sumber dengan tahanan dalam R , akan memberikan daya maksimum kepada tahanan beban R_L , bila $R = R_L$.

Dalam hal ini daya P oleh sumber dibagi 2 antara tahanan dalam R dengan tahanan beban R_L .

Bila $R = R_L$, beban disebut matched (sesuai) dengan sumber, dan daya yang diberikan ke beban disebut daya yang tersedia (available power) P_a .

Maka $P_a = 0,5P$, diberikan ke beban bila $R = R_L$.

Tegangan rms sumber: v_{rms}

$$v_{rms}^2 = 4kTRB$$

Tegangan di $R_L = R$ adalah $0,5v_{rms}$

$$P_a = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2} v_{rms} \right)^2 = \frac{v_{rms}^2}{4R}$$

Maka daya derai yang tersedia (available power) pada beban R

$$P_{a,R} = \frac{4kTRB}{4R} = kTB \text{ Watt}$$

Terlihat bahwa daya derai yang tersedia tidak bergantung nilai resistor R .

Daya derai yang tersedia pada beban R per bandwidth B dalam hertz:

$$\frac{P_{a,R}}{B} = kT \text{ Watt/Hz}$$

Densitas spektral daya derai 2 sisi:

$$S(f) = \frac{kT}{2} \text{ Watt/Hz}$$

4. Decibel (dB)

Didalam sistem komunikasi, sering kali dilakukan pengukuran daya sinyal dan daya derai.

Rasio sinyal-terhadap-derai:

$$\frac{S}{N} = \frac{P_{sinyal}}{P_{derai}} = \frac{\langle s^2(t) \rangle}{\langle n^2(t) \rangle}$$

Rasio sinyal-terhadap-derai dalam dB adalah:

$$(S/N)_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{sinyal}}{P_{derai}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\langle s^2(t) \rangle}{\langle n^2(t) \rangle} \right)$$

Level daya dalam dB relatif terhadap 1 mW adalah:

$$dBm = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{level daya aktual (W)}}{10^{-3}} \right)$$

$$dBm = 30 + 10 \log_{10}(\text{level daya aktual (W)})$$

Level daya dalam dB relatif terhadap 1 W disebut dBW, 0 dBW = 30 dBm.

Soal no 4.

Hitung daya derai yang tersedia, yang dihasilkan oleh resistor 10 kΩ, pada bandwidth dari 0 Hz sampai dengan 10 MHz, pada suhu 17°C.

Solusi:

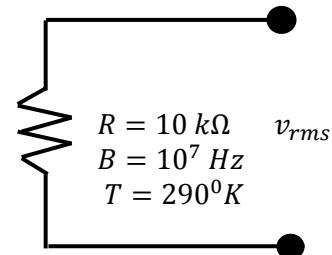
$$B = 10 \text{ MHz} = 10 \cdot 10^6 = 10^7 \text{ Hz.}$$

$$\text{Suhu } 17^\circ\text{C} = 290^\circ\text{K.}$$

Daya yang tersedia:

$$P_{a,R} = kTB = (1.38 \times 10^{-23}) \times 290 \times 10^7 \text{ Watt}$$

$$P_{a,R} = 4 \times 10^{-14} \text{ Watt} \rightarrow P_{a,R} = -134 \text{ dBW}$$



Tegangan derai rms di terminal resistor adalah:

$$v_{rms} = \sqrt{P_{a,R}R} = \sqrt{4 \times 10^{-10}} \text{ Volt} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Volt} = 20 \text{ microvolt}$$

Soal no 5.

Hitung daya derai yang tersedia per Hertz di bandwidth B untuk sebuah tahanan pada temperatur ruangan T₀ = 290⁰K.

Solusi:

Daya derai yang tersedia/Hertz :

$$\frac{P_{a,R}}{B} = kT = (1,38 \times 10^{-23})(290) = 4,002 \times 10^{-21} \text{ Watt/Hz}$$

Daya derai yang tersedia/Hertz dalam dBW:

$$10 \log_{10}(4,002 \times 10^{-21}/1) \cong -204 \text{ dBW/Hz}$$

Daya derai yang tersedia/Hertz dalam dBm:

$$10 \log_{10}(4,002 \times 10^{-21}/10^{-3}) \cong -174 \text{ dBm/Hz}$$

5. Ketergantungan terhadap frekuensi

Dari mekanika kuantum, daya tersedia per Hertz atau densitas spektral daya tersedia S_a(f):

$$S_a(f) \triangleq \frac{P_a}{B} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \text{ Watt/Hz}$$

Dimana h adalah konstanta Planck = 6,6254 × 10⁻³⁴ Joule – detik.

Daya derai tersedia per Hertz, juga disebut sebagai densitas spektral daya:

$$\frac{P_{a,R}}{B} = kT \text{ Watt/Hz}$$

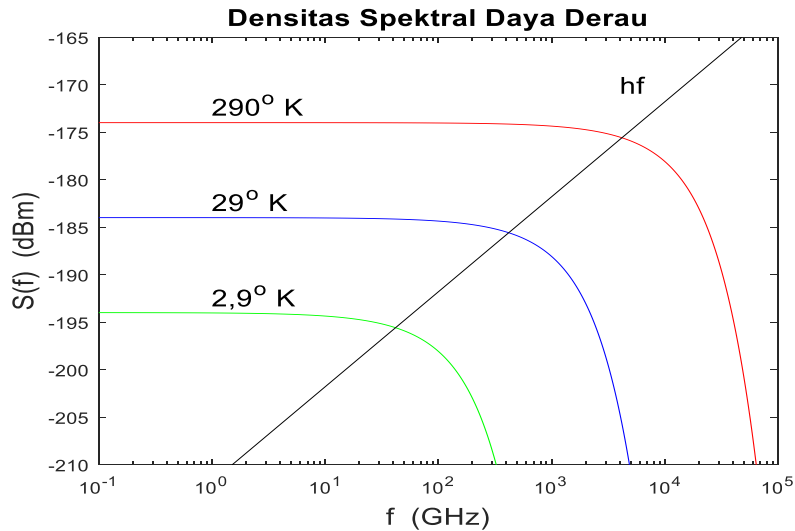
Daya/Hertz dalam dBm, T = 290⁰K: 10log₁₀(4,002 × 10⁻²¹/10⁻³) ≅ -174 dBm/Hz

Daya/Hertz dalam dBm, T = 29⁰K: 10log₁₀(4,002 × 10⁻²²/10⁻³) ≅ -184 dBm/Hz

Daya/Hertz dalam dBm, T = 2,9⁰K: 10log₁₀(4,002 × 10⁻²³/10⁻³) ≅ -194 dBm/Hz

Densitas spektral daya sebagai fungsi f untuk resistor thermal, pada suhu berbeda:

T $^{\circ}K$	$S(f)$ [dBm/Hz]
$290^{\circ}K$	-174 dBm/Hz s/d 1000 GHz
$29^{\circ}K$	-184 dBm/Hz s/d 100 GHz
$2,9^{\circ}K$	-194 dBm/Hz s/d 10 GHz



Derau thermal mempunyai densitas spektral daya $S_a(f) = P_a/B$, yang nilainya tergantung temperatur $^{\circ}K$. Dari gambar diatas terlihat bahwa densitas spektral daya $S_a(f)$ nilainya konstan sampai frekuensi tertentu, sehingga derau thermal umumnya dapat dimodelkan sebagai derau putih (white noise).

Apabila distribusi tegangan derau putih v_{rms} mengikuti distribusi gaussian, maka derau putih tersebut dikenal sebagai derau putih gaussian (**white Gaussian noise**, disingkat **WGN**).

Apabila derau putih gaussian ditambahkan ke sinyal informasi, maka disebut **additive white gaussian noise** atau disingkat dengan **AWGN**.

Pada saat kita membahas derau putih, ada 2 persamaan yang penting:

Rapat spektral daya derau putih:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{ konstan, untuk derau thermal } N_0 = kT \text{ Watt/Hz}$$

Fungsi autokorelasi derau putih:

$$R_w(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) = \frac{kT}{2} \delta(\tau) \text{ Dirac di } \tau = 0$$

6. Derau shot

Derau shot ada dari sifat diskrit aliran arus didevais elektronik.

Contoh aliran elektron disebut dioda thermionic saturasi akibat penjumlahan keseluruhan elektron-elektron yang dipancarkan dari katoda yang tiba secara acak di anoda, memberikan aliran arus rata-rata I_d ditambah fluktuasi acak komponen dengan nilai mean-square:

$$i_{rms}^2 = \langle i_n^2(t) \rangle = 2eI_d B \text{ Ampere}^2$$

Persamaan diatas dikenal sebagai **Teorema Schottky**.

e = muatan elektron = $1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb.

Aliran arus disebut dioda junction p-n:

$$I = I_s [e^{(eV/kT)} - 1]$$

V adalah tegangan di-dioda.

I_s adalah arus saturasi reverse, dapat dianggap disebabkan oleh 2 arus yang saling bebas: $I_s e^{(eV/kT)}$ dan $-I_s$.

Ke 2 arus fluktuasi saling bebas, menghasilkan **arus derau shot mean-square**:

$$i_{rms,tot}^2 = 2e [I_s e^{(eV/kT)} + I_s] B = 2e(I + I_s) B$$

Untuk operasi yang normal, $I \gg I_s$, dan konduktansi differensial adalah $g_0 = dI/dV = eI/kT$, sehingga persamaan diatas dapat didekati dengan:

$$i_{rms,tot}^2 \cong 2eIB = 2kT \left(\frac{eI}{kT} \right) B = 2kT g_0 B$$

Dapat dilihat sebagai **half-thermal noise (derau thermal separuh)** konduktansi differensial g_0 , karena ada faktor 2, dibandingkan dengan faktor 4 dipersamaan:

$$\overline{i_n^2} = \langle i_n^2 \rangle = \frac{\langle v_n^2 \rangle}{R^2} = \frac{4kTB}{R} \text{ Ampere}^2$$

Soal no 6.

- a. Hitung RMS tegangan derau yang muncul diterminal resistor $20 - k\Omega$, pada temperatur $23^{\circ}C$ dan bandwidth $1 MHz$.
- b. Hitung rapat spektral daya derau
- c. Hitung daya derau yang tersedia pada bandwidth tersebut diatas.

Solusi:

- a. Hitung RMS tegangan derau yang muncul diterminal resistor $20 - k\Omega$, pada temperatur $23^{\circ}C$ dan bandwidth $1 MHz$.
 $B = 1 MHz = 10^6 Hz$.
 Suhu $23^{\circ}C = 296^{\circ}K$.

Tegangan derau di terminal resistor adalah:

$$v_{rms}^2 = \langle v_n^2(t) \rangle = 4kTRB \text{ Volt}^2$$

$$v_{rms}^2 = 4 \times (1,38 \cdot 10^{-23}) \times 296 \times 20 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^6)$$

$$v_{rms}^2 = 29,6 \cdot 10^{-12} \text{ Volt}^2$$

$$v_{rms} = \sqrt{4kTRB} \text{ Volt} = 5,44 \cdot 10^{-6} \text{ Volt} = 5,44 \text{ microvolt}$$

- b. Hitung rapat spektral daya derau

$$\frac{P_{a,R}}{B} = kT = 4 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 296 = 1,634 \cdot 10^{-20} \text{ Watt/Hz}$$

- c. Hitung daya derau yang tersedia pada bandwidth tersebut diatas.

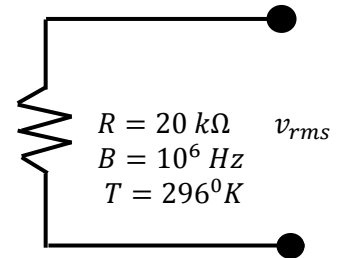
$$P_{a,R} = kTB = (1,38 \times 10^{-23}) \times 296 \times 10^6 = 1,634 \cdot 10^{-14} \text{ Watt}$$

Daya derau yang tersedia pada bandwidth tersebut diatas dalam dBW:

$$10 \log_{10}(1,634 \cdot 10^{-14} / 1) \cong -137,87 \text{ dBW}$$

Daya derau yang tersedia pada bandwidth tersebut diatas dalam dBm:

$$10 \log_{10}(1,634 \cdot 10^{-14} / 10^{-3}) \cong -167,87 \text{ dBm}$$



Referensi:

1. Rodger E Ziemer, William H Tranter, Principles of Communications Systems , Modulation, and Noise, 7th Edition, Wiley, 2015. Appendix A.
2. Simon Haykin, Michael Moher, Introduction to Analog & Digital Communications, 2nd Edition, Wiley, 2007. Chapter 8 dan Chapter 11.
3. Bruce Carlson, Paul Crilly, Communication Systems, 5th Edition, McGraw-Hill, 2010. Chapter 9.
4. K. Sam Shanmugam, Digital and Analog Communication System, John Wiley & Sons, 1979. Chapter 3.